اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

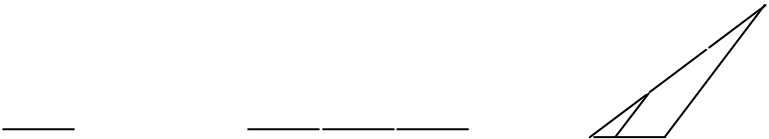
مفهوم عدد

اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب آنها

اعداد گویا و اعمال جبری روی آنها

مفهوم عدد

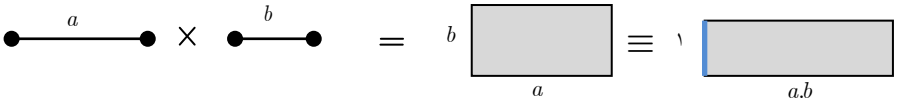
نمایش هندسی اعداد گویا



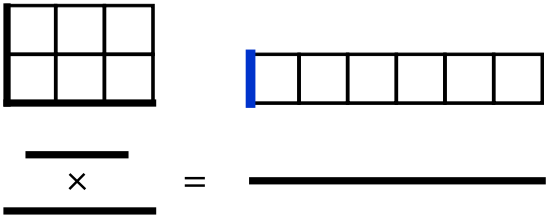
اعمال جبری روی پاره‌خط‌ها

جمع پاره‌خط‌ها

ضرب پاره‌خط‌ها

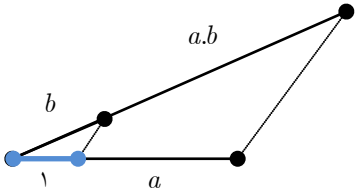


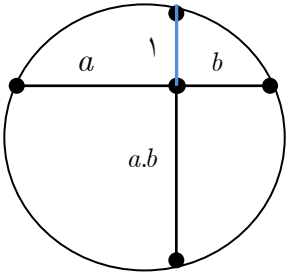
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

روشهای دیگر برای تعریف ضرب دو پاره‌خط





اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

سادگی جمع نسبت به ضرب

برای جمع دو پاره‌خط برخلاف ضرب آنها به پاره‌خط مقیاس نیازی نیست

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

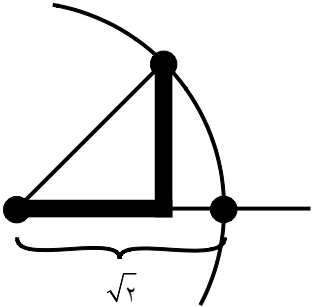
سادگی جمع نسبت به ضرب

برای جمع دو پاره‌خط برخلاف ضرب آنها به پاره‌خط مقیاس نیازی نیست

اعداد غیر گویا

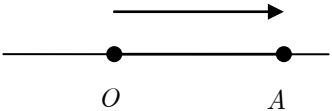
پاره‌خط‌هایی که متناظر اعداد گویا نیستند

اعمال جبری روی مجموعه جدید به کمک روش هندسی



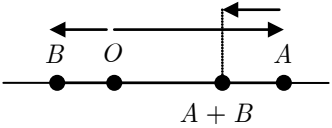
اعمال جبری روی نقاط یک خط

۱. انتخاب مبدأ و اهمیت آن



اعمال جبری روی نقاط یک خط

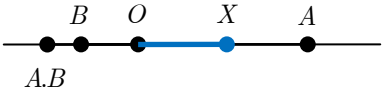
۲. جمع دو نقطه A و B



اعمال جبری روی نقاط یک خط

۳. ضرب دو نقطه A و B

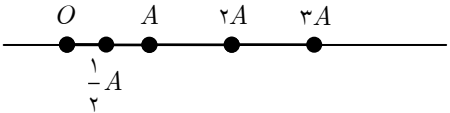
لزوم انتخاب واحد



اعمال جبری روی نقاط یک خط

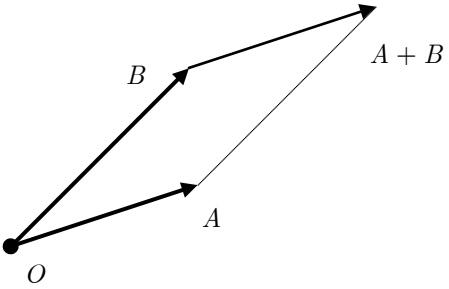
۴. ضرب یک نقطه در یک عدد!

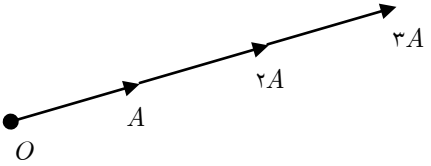
بر خلاف ضرب دو پاره‌خط برای ضرب یک عدد در یک پاره‌خط نیازی به انتخاب واحد نیست



معرفی ساختارهای جبری مشابه برای صفحه و فضا

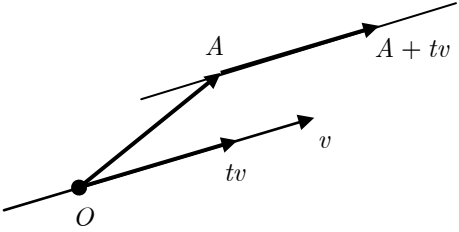
جمع و ضرب اسکالر.



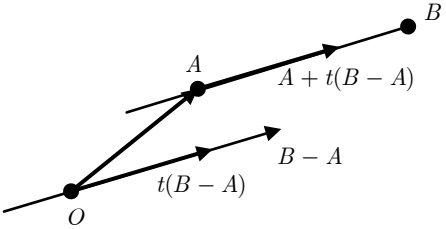


نمایش بعضی اشکال هندسی به کمک ساختار جبری

خط گذرنده از A که با v تولید می‌شود

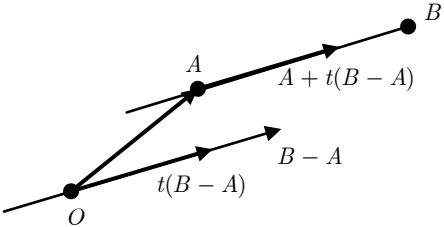


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (۱ - t)A + tB$$

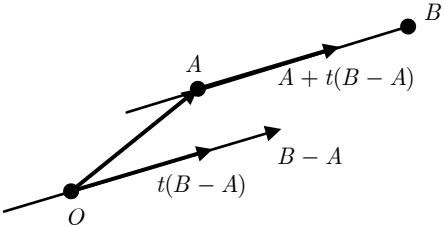
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (۱ - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

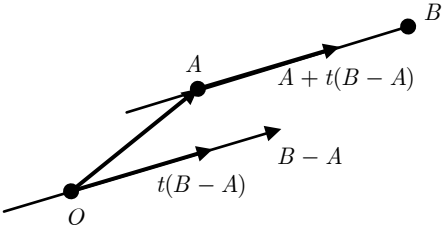


$$A + t(B - A) = (۱ - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



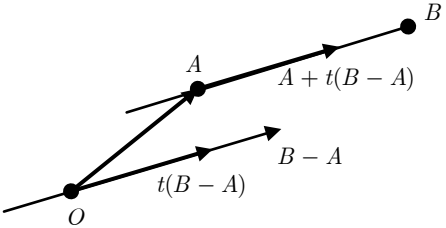
$$A + t(B - A) = (۱ - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PB} = (۱ - t)\overrightarrow{AB}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (۱ - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PB} = (۱ - t)\overrightarrow{AB}$$

پاره‌خط $\overline{AB}$ دقیقاً مجموعه نقاطی به صورت $(۱ - t)A + tB$ خواهد بود که در آن $۰ \leq t \leq ۱$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می‌توان نشان داد که

۱. وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{۲}$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می‌توان نشان داد که

۱. وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{۲}$.

۲. محل برخورد میانه‌های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{۳}$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می‌توان نشان داد که

۱. وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{۲}$.

۲. محل برخورد میانه‌های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{۳}$.

سه نقطه A، B و C روی یک خط قرار دارند	$\Leftrightarrow$	ضرایب حقیقی a، b و c وجود دارند که $a+b+c=۰$ و $aA+bB+cC=۰$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای $v_۱, v_۲$ تولید می‌شود

$$\{A + t_۱ v_۱ + t_۲ v_۲ \mid t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned}
&\{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\}
\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned}\{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = 1\}\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای $v_۱, v_۲$ تولید می‌شود

$$\{A + t_۱ v_۱ + t_۲ v_۲ \mid t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned}\{A + t_۱(B - A) + t_۲(C - A) \ : \ t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}\} \\ = \{(۱ - t_۱ - t_۲)A + t_۱ B + t_۳ C \ : \ t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}\} \\ = \{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = ۱\}\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

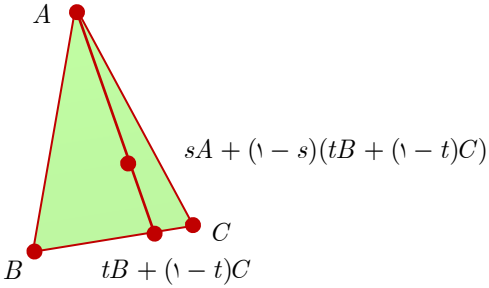
۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = ۱ \, , \, ۰ \leq a,b,c \leq ۱\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

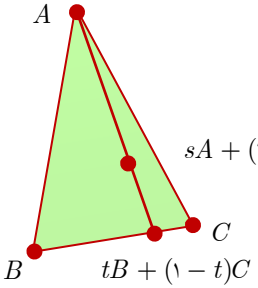
$$\{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = ۱ \, , \, ۰ \leq a,b,c \leq ۱\}$$



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = ۱ \, , \, ۰ \leq a,b,c \leq ۱\}$$



$$sA + (۱ - s)(tB + (۱ - t)C) = sA + (۱ - s)tB + (۱ - s)(۱ - t)C$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

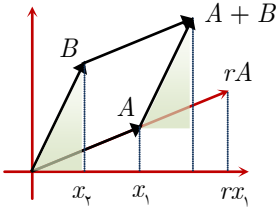
۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = ۱ \, , \, ۰ \leq a,b,c \leq ۱\}$$

۷. چهار نقطه A، B، C و D روی یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a، b، c و d وجود داشته باشند که $a + b + c + d = ۰$ و $aA + bB + cC + dD = ۰$.

$\mathbb{R}^n$ و صفحه‌های تعمیم یافته در آن

مختصات دکارتی و جمع و ضرب در این مختصات



$$A+B=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$rA=r(x_1,y_1)=(rx_1,ry_1)$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$A + B := (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n), \qquad rA := (rx_1,\dots,rx_n)$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$A + B := (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n), \qquad rA := (rx_1,\dots,rx_n)$$

اعضای $\mathbb{R}^n$ را گاهی نقطه و گاهی بردار می‌نامیم!

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_1, \ldots, a_n)$ و $v = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_1, \ldots, a_n)$ و $v = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned} \{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\} &= \{(1 - t)A + tB : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB : a + b = 1\} \end{aligned}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_۱,\ldots,a_n)$ و $v = (b_۱,\ldots,b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_۱ + tb_۱,\ldots,a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned}\{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\} &= \{(۱ - t)A + tB : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB : a + b = ۱\}\end{aligned}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $P = (۱ - t)A + tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BP} = P - B = (۱ - t)(A - B) = (۱ - t)\overrightarrow{AB}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $P = (۱-t)A + tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BP} = P - B = (۱-t)(A - B) = (۱-t)\overrightarrow{AB}$$

پاره‌خط $\overline{AB}$ $\{(۱-t)A + tB \ : \ ۰ \leq t \leq ۱\}$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}
&\{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = 1\}
\end{aligned}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}\{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = 1\}\end{aligned}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}\{A + t_1(B-A) + t_2(C-A) \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C \ : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ = \{aA + bB + cC \ : \ a + b + c = 1\}\end{aligned}$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

*صفحه تعمیم یافته*ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای $v_1, \ldots, v_k$ تولید می‌شود

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته اند.

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

زیرفضا: **زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{R}^n$ که تحت جمع و ضرب بسته است.**

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

***زیرفضا*: زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{R}^n$ که تحت جمع و ضرب بسته است.**

$V \subset \mathbb{R}^n$ زیرفضا است اگر ناتهی باشد و

$$\forall v_1, v_2 \in V,\ r \in \mathbb{R} \quad : \quad v_1 + r v_2 \in V$$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

V **یک زیرفضای** $\mathbb{R}^n$ **و** $v_1, \ldots, v_k \in V \quad \Leftarrow \quad t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in V$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

V **یک زیرفضای** $\mathbb{R}^n$ **و** $v_1, \ldots, v_k \in V \quad \Leftarrow \quad t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in V$

- *ترکیب خطی* k *بردار* $v_1, \ldots, v_k$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

V **یک زیرفضای** $\mathbb{R}^n$ **و** $v_1, \ldots, v_k \in V \quad \Leftarrow \quad t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in V$

- *ترکیب خطی* k *بردار* $v_1, \ldots, v_k$
- **قرار داد**: ترکیب خطی صفرتا بردار برابر صفر است!

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1, u_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in \bigcap V_\alpha$$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1, v_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in \bigcap V_\alpha$$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1, v_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1 + rv_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1 + rv_2 \in \bigcap V_\alpha$$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1, v_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1 + rv_2 \in V_\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1 + rv_2 \in \bigcap V_\alpha$$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- **کوچک‌ترین زیرفضای شامل** $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- **کوچک‌ترین زیرفضای شامل** $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \quad | \, l \in N \cup \{0\} \;\; , \;\; v_i \in S \}$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- **کوچک‌ترین زیرفضای شامل** $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \quad | \, l \in N \cup \{0\} \;\; , \;\; v_i \in S \}$

- $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- **کوچک‌ترین زیرفضای شامل** $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \quad | \, l \in N \cup \{0\} \;\; , \;\; v_i \in S \}$

- $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$

اگر S نامتناهی باشد یک ترکیب خطی از اعضای S در واقع ترکیبی خطی از متناهی عضو آن است.

توجه. مجموع نامتناعی هیچ معنی‌ای نمی‌دهد.

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- **اگر** $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ **آنگاه** $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- اگر $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- اگر $V \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V \rangle = V$

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- اگر $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- اگر $V \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V \rangle = V$
- اگر V و W دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه مجموعه

$$V + W := \{ v + w \quad | v \in V \quad , \quad w \in W \}$$

نیز یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است و داریم $\langle V \cup W \rangle = V + W$

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

$$u, u' \in V + W \quad \Rightarrow \quad u = v + w,\ u' = v' + w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W$$
$$\Rightarrow \quad u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

$$u, u' \in V + W \quad \Rightarrow \quad u = v + w,\ u' = v' + w' \ : \ v, v' \in V, w, w' \in W$$

$$\Rightarrow \quad u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

$$u, u' \in V + W \quad \Rightarrow \quad u = v + w,\ u' = v' + w'$$

V W

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

$$u, u' \in V + W \quad \Rightarrow \quad u = v + w,\ u' = v' + w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W$$
$$\Rightarrow \quad u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W \quad &\Rightarrow \quad u = v + w,\ u' = v' + w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow \quad u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

اثبات.

- $V+W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V+W \quad &\Rightarrow \quad u = v+w,\ u' = v' + w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow \quad u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V+W \end{aligned}$$

- $V+W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V+W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V+W \quad &\Rightarrow \quad u = v+w,\ u' = v'+w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow \quad u + ru' = (v+rv') + (w+rw') \in V+W \end{aligned}$$

- $V+W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.
- هر زیرفضای شامل V و W باید مجموع‌هایی به شکل $v+w$ را که $v \in V$ و $w \in W$ است داشته باشد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

- $V+W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V+W \quad &\Rightarrow \quad u = v+w,\ u' = v'+w' \ :\ v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow \quad u + ru' = (v+rv') + (w+rw') \in V+W \end{aligned}$$

- $V+W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.
- هر زیرفضای شامل V و W باید مجموع‌هایی به شکل $v+w$ را که $v \in V$ و $w \in W$ است داشته باشد.

$\Leftarrow$ $V+W$ کوچک‌ترین زیرفضای شامل V و W است.

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.

راه حل. حذف بردار زائد.

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.

راه حل. حذف بردار زائد.

- ممکن است مجموعه‌های بدون بردار زائد متفاوتی یک صفحه را تولید کنند.

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.

راه حل. حذف بردار زائد.

- ممکن است مجموعه‌های بدون بردار زائد متفاوتی یک صفحه را تولید کنند.

در ادامه نشان می‌دهیم که تعداد اعضای این نوع مجموعه‌ها برابرند.

مجموعه‌های مولدی که هیچ عضو زائد ندارند و استقلال خطی

بردار v_i در مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ زائد است اگر با حذفش از این مجموعه فضای تولید شده توسط این مجموعه تغییر نکند

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle = \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

مجموعه‌های مولدی که هیچ عضو زائد ندارند و استقلال خطی

بردار v_i در مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ زائد است اگر با حذفش از این مجموعه فضای تولید شده توسط این مجموعه تغییر نکند

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle = \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

به بیان دیگر v_i در مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ زائد است اگر در فضای تولید شده توسط دیگر بردارها باشد.

$$v_i \in \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$v_k \in \langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle \quad \Rightarrow \quad v_k = t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1}$$
$$\Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} + (-1)v_k = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$v_k \in \langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle \quad \Rightarrow \quad v_k = t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} + (-1)v_k = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$\begin{aligned} v_k \in \langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle \quad &\Rightarrow \quad v_k = t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} \\ &\Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} + (-1)v_k = 0 \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1+\cdots+t_kv_k=0 \quad\Rightarrow\quad t_1=\cdots=t_k=0$$

قسمت دوم

$$t_1v_1+\cdots+t_kv_k=0,\ t_k\neq 0 \quad\Rightarrow\quad t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1}=-t_kv_k$$

$$\Rightarrow\quad v_k=\frac{-t_1}{t_k}v_1+\cdots+\frac{-t_k}{t_k}v_{k-1} \quad\Rightarrow\quad v_k\in\langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0,\ t_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} = -t_kv_k$$

$$\Rightarrow \quad v_k = \frac{-t_1}{t_k}v_1 + \cdots + \frac{-t_{k-1}}{t_k}v_{k-1} \quad \Rightarrow \quad v_k \in (v_1,\dots,v_{k-1})$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0,\ t_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} = -t_kv_k$$

$$\Rightarrow \quad v_k = \frac{-t_1}{t_k}v_1 + \cdots + \frac{-t_{k-1}}{t_k}v_{k-1} \quad \Rightarrow \quad v_k \in (v_1,\dots,v_{k-1})$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0,\ t_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_1v_1 + \cdots + t_{k-1}v_{k-1} = -t_kv_k$$

$$\Rightarrow \quad v_k = \frac{-t_1}{t_k}v_1 + \cdots + \frac{-t_{k-1}}{t_k}v_{k-1} \quad \Rightarrow \quad v_k \in \langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle$$

مجموعه مستقل خطی

$$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

مجموعه‌ای که عضو زائد ندارد

مجموعه *مستقل خطی*

$$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

مجموعه‌ای که عضو زائد ندارد

مجموعه *وابسته خطی*

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\varnothing$ مستقل خطی است.

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\varnothing$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\varnothing$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$

۳. $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ هیچ کدام مضرب دیگری نیستند

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\varnothing$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$

۳. $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ هیچ کدام مضرب دیگری نیستند

۴. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مجموعه‌ای مستقل خطی است.
(در نتیجه هر مجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است.)

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k \rangle$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1,\dots,v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است } \quad \Leftrightarrow \quad v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$$

اثبات.

$$\{v_1,\dots,v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی } \quad \Leftarrow \quad v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1,\dots,v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \quad \Leftrightarrow \quad v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

$t_{k+1} = 0$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

$t_{k+1} = 0$ $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k + 0 = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

$t_{k+1} = 0$ $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k + 0 = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

$\Leftarrow$ $\{v_1,\dots,v_k\}$ وابسته خطی

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی $\Leftarrow$ $v_{k+1} \notin \langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

$\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ وابسته خطی $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

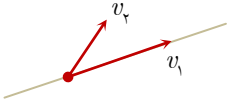
$t_{k+1} = 0$ $\Leftarrow$ $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k + 0 = 0$ و همه t_i ها صفر نیستند

$\Leftarrow$ $\{v_1,\dots,v_k\}$ وابسته خطی

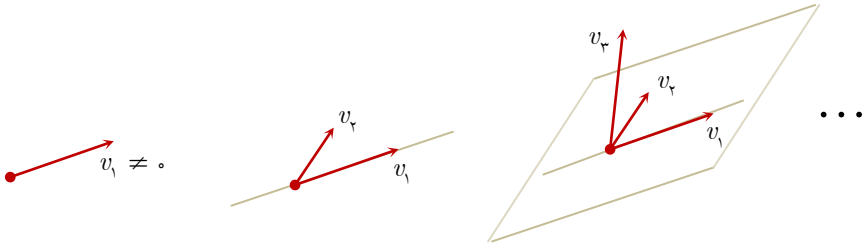
$$v_{k+1} = \frac{-t_1}{t_{k+1}}v_1 + \cdots + \frac{-t_k}{t_{k+1}}v_k \quad \Rightarrow \quad v_{k+1} \in \langle v_1,\dots,v_k\rangle$$

روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی

روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی



روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی



پایه و بُعد

$\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک ***پایه*** برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

پایه و بُعد

$\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک **پایه** برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

پایه و بُعد

$\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک **پایه** برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

$$t_1e_1+\cdots+t_ne_n=0 \quad\Rightarrow\quad (t_1,\dots,t_n)=0 \;\Rightarrow\; t_1=\cdots=t_n=0$$

پایه و بُعد

$\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک **پایه** برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

$$t_1e_1+\cdots+t_ne_n=0 \quad\Rightarrow\quad (t_1,\dots,t_n)=0 \;\Rightarrow\; t_1=\cdots=t_n=0$$

$$v=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n \qquad : \qquad v=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

فرض کنید $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ **و** $\{w_1, \ldots, w_l\} \subset V$ **مستقل خطی است.**

۱. $l \leq k$.

۲. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ **را می‌توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه** V **تقلیل داد.**

۳. $\{w_1, \ldots, w_l\}$ **را می‌توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه** V **گسترش داد.**

۴. V **دارای پایه است و هر دو پایه برای** V **دارای تعداد اعضای برابر هستند.**

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, .., v_k\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\} \qquad \{w_2, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\} \qquad \{w_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\cdots$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1,\dots,w_l\}$$

$$\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2,\dots,v_k\rangle = V$$

$$\{w_1,\dots,w_l\}$$

$$\{w_1, v_2,\dots,v_i,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1, w_2, v_3,\dots,v_k\rangle = V$$

$$\cdots$$

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i, v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\cdots$$

$$\{w_{i+1}, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \ldots, , w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_1, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\cdots$$

$$\{w_{i+1}, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \ldots, , w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$\cdots$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

?

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$$

$$\{w_{i+1}, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1,\dots,,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

$$w_{i+1} = t_1w_1 + \cdots + t_iw_i + t_{i+1}v_{i+1} + \cdots + t_kv_k$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ صفر نیست

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \cdots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \cdots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \ldots, t_k$ صفر نیست

$$\{w_{i+1}, \ldots, w_l\}$$

$$\{w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, \ldots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \rangle = V$$

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \cdots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \cdots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

$$v_{i+1} \in \langle w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \cdots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \cdots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

$$v_{i+1} \in \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle$$

$$\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle$$

$$= \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1},\dots,w_l\}$$

$$\{w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_k\}$$

$$\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \cdots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \cdots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

$$v_{i+1} \in \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle &= \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle \\ &= \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

فرض کنید $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ **و** $\{w_1, \ldots, w_l\} \subset V$ **مستقل خطی است.**

۱. $l \leq k$.

۲. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ **را می‌توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه** V **تقلیل داد.**

۳. $\{w_1, \ldots, w_l\}$ **را می‌توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه** V **گسترش داد.**

۴. V **دارای پایه است و هر دو پایه برای** V **دارای تعداد اعضای برابر هستند.**

در مورد صفحه‌هایی است که از مبدأ می‌گذرند

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی‌تواند داشته باشد

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی‌تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی‌تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ یک صفحه تعمیم یافته است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی‌تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ یک صفحه تعمیم یافته است.

$\dim(V)$ **بُعد زیرفضای** $V \subseteq \mathbb{R}^n$

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

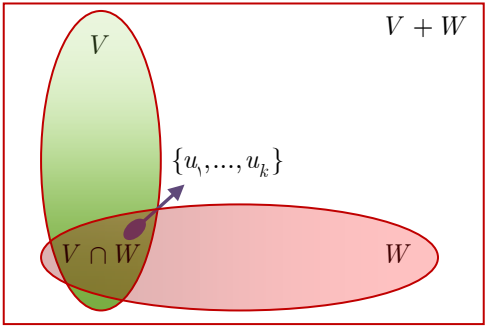
هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

اگر $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $\dim(V) \leq \dim(W)$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $V = W$ باشد.

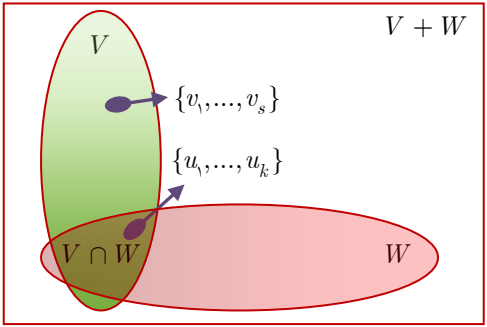
قضیه. فرض کنید $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت

$$\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W.$$

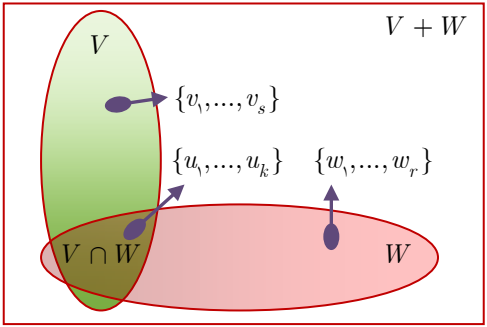
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



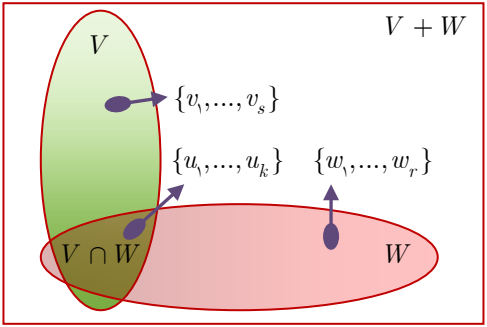
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

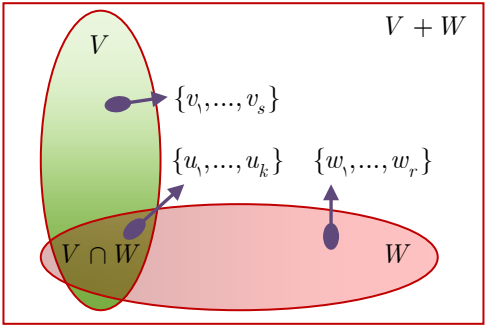


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



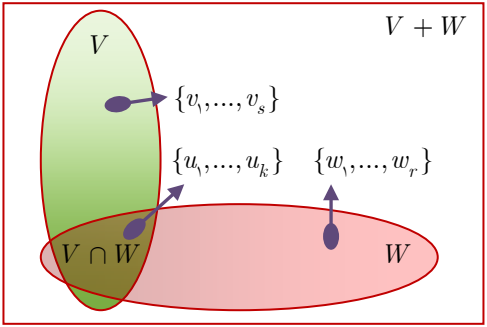
$x \in V + W$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$x \in V + W \quad \Rightarrow$$
$$x = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



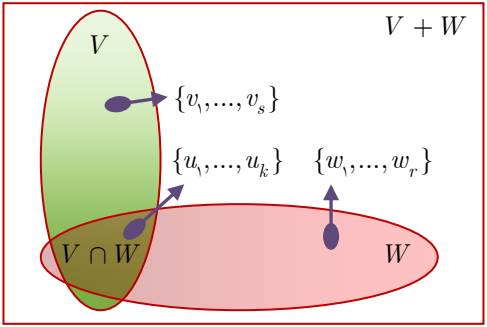
$$x \in V+W \quad \Rightarrow$$

$$x = v+w, \quad v \in V, w \in W$$

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{k} a_i^* u_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$x \in V + W \quad \Rightarrow$$

$$x = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{k} a_i^* u_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i$$

$$x = v + w = \sum_{i=1}^{k} (a_i + a_i^*) u_i + \sum_{i=1}^{r} b_i w_i + \sum_{i=1}^{s} c_i v_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=۱}^{k} a_i u_i + \sum_{i=۱}^{s} b_i v_i + \sum_{i=۱}^{r} c_i w_i = ۰$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i = -\sum_{i=1}^{r} c_i w_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i}_{W}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i}_{W} \qquad V \cap W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i}_{W} \qquad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} d_i u_i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} d_i u_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i}_{W} \qquad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} d_i u_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} d_i u_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i}_{W} \qquad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^{r} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} d_i u_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} d_i u_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$d_1 = \ldots = d_k = c_1 = \ldots = c_r = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{0}_{W} \qquad V \cap W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0$$

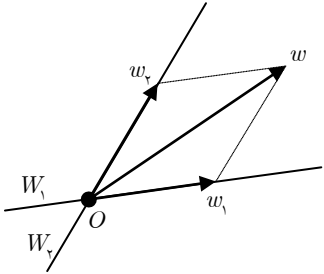
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i}_{V} = \underbrace{0}_{W} \qquad V \cap W$$

$$a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_s = 0$$

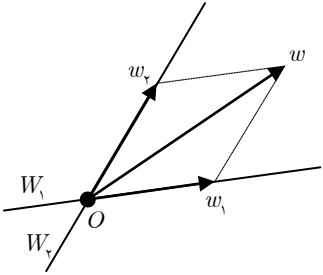
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۱. $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$

۲. $\dim(W_۱ + W_۲) = \dim(W_۱) + \dim(W_۲)$



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

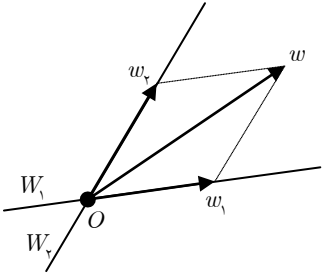


۱. $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$

۲. $\dim(W_۱ + W_۲) = \dim(W_۱) + \dim(W_۲)$

۳. اجتماع پایه‌های $W_۱$ و $W_۲$ پایه‌ای برای $W_۱ + W_۲$ خواهد بود

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



۱. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

۲. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

۳. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

۴. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_1 + w_2$ دارد که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$

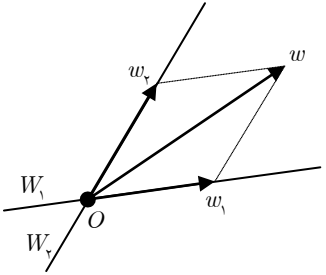
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۱. $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$

۲. $\dim(W_۱ + W_۲) = \dim(W_۱) + \dim(W_۲)$

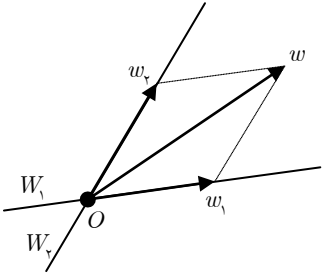
۳. اجتماع پایه‌های $W_۱$ و $W_۲$ پایه‌ای برای $W_۱ + W_۲$ خواهد بود

۴. هر عضو $w \in W_۱ + W_۲$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_۱ + w_۲$ دارد که در آن $w_۱ \in W_۱$ و $w_۲ \in W_۲$



$$w = w_۱ + w_۲ = w_۱' + w_۲'$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



۱. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

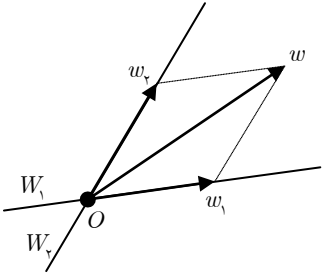
۲. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

۳. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

۴. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_1 + w_2$ دارد که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$

$$w = w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \quad \Rightarrow \quad w_1 - w_1' = w_2' - w_2$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



۱. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

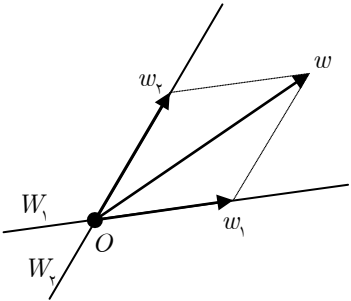
۲. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

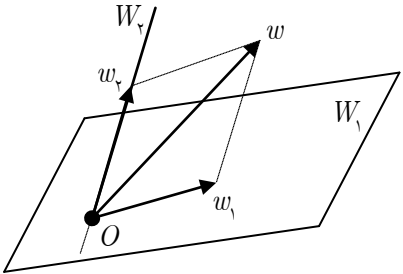
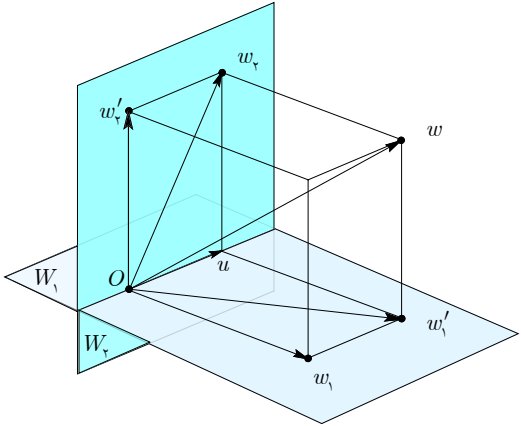
۳. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

۴. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_1 + w_2$ دارد که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$

$$w = w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{w_1 - w_1'}}_{W_1} = \underbrace{\boxed{w_2' - w_2}}_{W_2}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها





اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها